

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ și $b \neq 0$.

5p a) Să se arate că dacă matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX = XA$, atunci există $u, v \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

5p b) Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$, unde $x_n = \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}$, $y_n = \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}$.

5p c) Să se rezolve în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră $a \in \mathbb{Z}_7$ și polinomul $f = X^6 + aX + \hat{5} \in \mathbb{Z}_7[X]$.

5p a) Să se verifice că, pentru orice $b \in \mathbb{Z}_7$, $b \neq \hat{0}$, are loc relația $b^6 = \hat{1}$.

5p b) Să se arate că $x^6 + \hat{5} = (x^3 - \hat{4})(x^3 + \hat{4})$, $\forall x \in \mathbb{Z}_7$.

5p c) Să se demonstreze că pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7$, polinomul f este reducibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.