

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se arate că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = aA$.

5p b) Să se calculeze $(A - A^t)^{2009}$.

5p c) Să se rezolve ecuația $X^5 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pentru a, b din mulțimea $M = [0, \infty)$ se definește operația $a * b = \ln(e^a + e^b - 1)$.

5p a) Să se arate că dacă $a, b \in M$, atunci $a * b \in M$.

5p b) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.

5p c) Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, să se determine $a \in M$ astfel încât $\underbrace{a * a * \dots * a}_{\text{de } n \text{ ori } a} = 2a$.