

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și sistemul 
$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 3 \\ y + 2z + 3t = 2 \\ z + 2t = 1 \end{cases}$$

**5p** a) Să se determine rangul matricei  $A$ .

**5p** b) Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului.

**5p** c) Să se demonstreze că ecuația  $XA = B$  nu are soluții  $X \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$ .

2. Se consideră mulțimea  $G = \left\{ A(k) = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ , și pentru fiecare  $t \in \mathbb{Z}$  notăm cu

$$H_t = \left\{ A(kt - 1) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Se admite faptul că  $(G, \cdot)$  este un grup, unde „ $\cdot$ ” este înmulțirea matricelor.

**5p** a) Să se arate că  $\forall n, p \in \mathbb{Z}, A(n) \cdot A(p) = A(n + p + 1)$ .

**5p** b) Să se demonstreze că, pentru orice  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $H_t$  este un subgrup al grupului  $(G, \cdot)$ .

**5p** c) Să se demonstreze că grupurile  $(G, \cdot)$  și  $(\mathbb{Z}, +)$  sunt izomorfe.