

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră polinoamele  $f, g \in \mathbb{R}[X]$ ,  $f = X^2 + X + 1$ , cu rădăcinile complexe  $x_1, x_2$  și

$$g = aX^2 + bX + c, \text{ cu } a \neq 0. \text{ Fie matricele } A, V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), A = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix} \text{ și } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}.$$

**5p** a) Să se arate că  $\det(V) = 3(x_2 - x_1)$ .

**5p** b) Să se arate că  $A \cdot V = \begin{pmatrix} g(1) & g(x_1) & g(x_2) \\ g(1) & x_1 g(x_1) & x_2 g(x_2) \\ g(1) & x_1^2 g(x_1) & x_2^2 g(x_2) \end{pmatrix}$ .

**5p** c) Să se arate că  $\det(A) = 0$  dacă și numai dacă  $a + b + c = 0$  sau  $a = b = c$ .

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$ ,  $f(x) = x^4 + 4x$ .

**5p** a) Să se calculeze  $f(\hat{0})$  și  $f(\hat{1})$ .

**5p** b) Să se arate că funcția  $f$  nu este surjectivă.

**5p** c) Să se descompună polinomul  $X^4 + 4X \in \mathbb{Z}_5[X]$  în factori ireductibili peste  $\mathbb{Z}_5$ .