

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ mx + y + z = 3m \end{cases}, \text{ unde } m \in \mathbb{R}. \text{ Pentru fiecare } m \in \mathbb{R}, \text{ notăm cu } S_m$$

mulțimea soluțiilor reale ale sistemului.

5p a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p b) Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

5p c) Să se determine $\min \{x^2 + y^2 + z^2 \mid (x, y, z) \in S_1\}$.

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = A \cdot B$ și mulțimea

$$G = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \det(X) = 1 \right\}.$$

5p a) Să se verifice că $A^4 = B^6 = I_2$.

5p b) Să se arate că (G, \cdot) este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile de ordin doi, cu elemente numere complexe.

5p c) Să se demonstreze că $C^n \neq I_2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.