

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze $\det(A)$.

5p b) Să se arate că dacă $a + b + c \neq 0$ și A nu este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$, atunci $a = b = c$.

5p c) Să se arate că sistemul de ecuații liniare
$$\begin{cases} ax + by + cz = \frac{1}{2}x \\ cx + ay + bz = \frac{1}{2}y \\ bx + cy + az = \frac{1}{2}z \end{cases}$$
 admite numai soluția $x = y = z = 0$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - 5X^2 + 5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

5p a) Să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

5p b) Să se arate că polinomul f are toate rădăcinile reale.

5p c) Să se arate că dacă g este un polinom cu coeficienți reali care are proprietatea că pentru orice x real $|g(x)| \leq |f(x)|$, atunci există $a \in [-1, 1]$ astfel încât $g = af$.