

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Pentru  $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ , se consideră sistemul 
$$\begin{cases} ax + by + cz = b \\ cx + ay + bz = a \\ bx + cy + az = c \end{cases}, x, y, z \in \mathbb{R}.$$

**5p** a) Să se arate că determinantul sistemului este  $\Delta = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$ .

**5p** b) Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

**5p** c) Știind că  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$ , să se arate că sistemul are o infinitate de soluții  $(x, y, z)$ , astfel încât  $x^2 + y^2 = z - 1$ .

2. Se consideră mulțimea  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_4 \right\}$ .

**5p** a) Să se determine numărul elementelor mulțimii  $G$ .

**5p** b) Să se dea un exemplu de matrice  $A \in G$  cu proprietatea că  $\det A \neq \hat{0}$  și  $\det A^2 = \hat{0}$ .

**5p** c) Să se determine numărul soluțiilor ecuației  $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ ,  $X \in G$ .