

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ a^3x + b^3y + c^3z = 1 \end{cases}$$
, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, distincte două câte două și A matricea sistemului.

5p a) Să se arate că $\det(A) = (a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$.

5p b) Să se rezolve sistemul în cazul $a+b+c \neq 0$.

5p c) Să se demonstreze că dacă $a+b+c=0$, atunci sistemul este incompatibil.

2. Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cu $a_0 = 0$ și $a_{n+1} = a_n^2 + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, cu $f(0) = 0$ și cu proprietatea că $f(x^2 + 1) = (f(x))^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se calculeze $f(5)$.

5p b) Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) = a_n$.

5p c) Să se arate că $f = X$.