

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A) = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & 5b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \right\}$.

5p a) Să se arate că $\forall X \in C(A), XA = AX$.

5p b) Să se arate că dacă $Y \in C(A)$ și $Y^2 = O_2$, atunci $Y = O_2$.

5p c) Să se arate că dacă $Z \in C(A), Z \neq O_2$ și Z are toate elementele raționale, atunci $\det Z \neq 0$.

2. Se consideră $a \in \mathbb{Z}_3$ și polinomul $f = X^3 + \hat{2}X^2 + a \in \mathbb{Z}_3[X]$.

5p a) Să se calculeze $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2})$.

5p b) Pentru $a = \hat{2}$, să se determine rădăcinile din \mathbb{Z}_3 ale polinomului f .

5p c) Să se determine $a \in \mathbb{Z}_3$ pentru care polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.