

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ , cu  $t \in \mathbb{R}$ .

**5p** a) Să se arate că dacă matricea  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  verifică relația  $AX = XA$ , atunci există  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ .

**5p** b) Să se demonstreze că  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $B^n = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}$ .

**5p** c) Să se rezolve în mulțimea  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ecuația  $X^2 = A$ .

2. Se consideră  $a \in \mathbb{R}$  și polinomul  $f = 3X^4 - 2X^3 + X^2 + aX - 1 \in \mathbb{R}[X]$ .

**5p** a) Să se calculeze  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$ , unde  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .

**5p** b) Să se determine restul împărțirii polinomului  $f$  la  $(X-1)^2$ .

**5p** c) Să se demonstreze că  $f$  nu are toate rădăcinile reale.