

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL II (30p)**

1. În mulțimea  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  și  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**5p** a) Să se determine rangul matricei  $A + I_2$ .

**5p** b) Să se demonstreze că dacă  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  astfel încât  $AX = XA$ , atunci există  $x, y \in \mathbb{C}$  astfel încât  $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$ .

**5p** c) Să se demonstreze că ecuația  $Y^2 = A$  nu are nicio soluție în mulțimea  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

2. Pe mulțimea  $\mathbb{R}$  se definește legea de compoziție  $x * y = x + y + xy$ .

**5p** a) Să se arate că legea „ $*$ ” este asociativă.

**5p** b) Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 1$ . Să se verifice relația  $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .

**5p** c) Să se calculeze  $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{2008} * \frac{1}{2009}$ .