

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră sistemul 
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ mx + y + z = m - 1, \quad m \in \mathbb{R} \\ x + my + 2z = -1 \end{cases}$$
 și matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix}$ .

**5p** a) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care  $\det(A) = 0$ .

**5p** b) Să se arate că pentru orice  $m \in \mathbb{R}$  sistemul este compatibil.

**5p** c) Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  știind că sistemul are o soluție  $(x_0, y_0, z_0)$  cu  $z_0 = 2$ .

2. Se consideră mulțimea  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ , submulțimea  $G = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \mid X = \begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$  și matricele

$$O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \text{ și } I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}.$$

**5p** a) Să se verifice că dacă  $x, y \in \mathbb{Z}_3$ , atunci  $x^2 + y^2 = \hat{0}$  dacă și numai dacă  $x = y = \hat{0}$ .

**5p** b) Să se arate că mulțimea  $H = G \setminus \{O_2\}$  este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ .

**5p** c) Să se rezolve ecuația  $X^2 = I_2, X \in G$ .