

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră numerele reale a, b, c , funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x + 3$ și determinanții

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \text{ și } B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}.$$

5p a) Să se arate că $A = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

5p b) Să se arate că $A = B$.

5p c) Să se arate că, pentru orice trei puncte distincte, cu coordonate naturale, situate pe graficul funcției f , aria triunghiului cu vârfurile în aceste puncte este un număr natural divizibil cu 3.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{ X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R} \}$.

5p a) Să se arate că $\forall a, b \in \mathbb{R}, X(a)X(0) = X(a)$ și $X(a)X(b) = X(a+b-10ab)$.

5p b) Să se arate că mulțimea $H = \left\{ X(a) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{10} \right\} \right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

5p c) Să se rezolve ecuația $X^2 = I_2, X \in G$.