

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A = aI_3 + bB + cB^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se calculeze B^3 .

5p b) Să se calculeze B^{-1} .

5p c) Să se demonstreze că $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a + b + c)\det(A) \geq 0$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ și $H = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}_7\}$.

5p a) Să se arate că $H = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$.

5p b) Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7$ există $x, y \in \mathbb{Z}_7$ astfel încât $a = x^2 + y^2$.

5p c) Să se arate că $\{x^{2000} \mid x \in \mathbb{Z}_7\} = H$.