

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se arate că $\det(A) = (a-b)(a-1)$.

5p b) Să se calculeze $\det(A - A^t)$.

5p c) Să se arate că $\text{rang } A \geq 2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + pX^2 + qX + r$, cu $p, q, r \in (0, \infty)$ și cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

5p a) Să se demonstreze că f nu are rădăcini în intervalul $[0, \infty)$.

5p b) Să se calculeze $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ în funcție de p, q și r .

5p c) Să se demonstreze că dacă a, b, c sunt trei numere reale astfel încât $a + b + c < 0$, $ab + bc + ca > 0$ și $abc < 0$, atunci $a, b, c \in (-\infty, 0)$.