

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea de matrice $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & b & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}$.

5p a) Să se calculeze A^3 .

5p b) Să se arate că dacă $X \in M_3(\mathbb{C})$ și $AX = XA$, atunci $X \in M$.

5p c) Să se arate că ecuația $X^2 = A$ nu are soluții în $M_3(\mathbb{C})$.

2. Se consideră polinomul $f = aX^4 + bX + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

5p a) Să se arate că numărul $f(3) - f(1)$ este număr par.

5p b) Să se arate că, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$, numărul $f(x) - f(y)$ este divizibil cu $x - y$.

5p c) Să se determine coeficienții polinomului f știind că $f(1) = 4$ și $f(b) = 3$.