

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = I_3 + A$, $C = I_3 + aA$, cu $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se calculeze $S = A - XY$.

5p b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $BC = I_3$.

5p c) Să se arate că $A^{n+1} = 14A^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ și numărul $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, astfel încât $f(\varepsilon) = 0$.

5p a) Să se demonstreze că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

5p b) Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe sistemul
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y\varepsilon + z\varepsilon^2 = 0 \\ x + y\varepsilon^2 + z\varepsilon = 0 \end{cases}$$

5p c) Să se arate că, dacă f divide $f_1(X^3) + Xf_2(X^3) + X^2f_3(X^3)$, unde f_1, f_2, f_3 sunt polinoame cu coeficienți complecși, atunci fiecare dintre polinoamele f_1, f_2, f_3 este divizibil cu $X - 1$.