

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, cu $AB - BA = A$ și matricele $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se determine rangul matricei A_0 .

5p b) Să se arate că $A_0 B_0 - B_0 A_0 = A_0$.

5p c) Să se demonstreze că $A^n B - B A^n = n A^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = 4X^3 - 12X^2 + aX + b$.

5p a) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul f să se dividă cu polinomul $X^2 - 1$.

5p b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât ecuația $f(x) = 0$ să aibă soluția $x = i \in \mathbb{C}$.

5p c) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât polinomul să aibă rădăcinile x_1, x_2, x_3 în progresie aritmetică și, în plus, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.