

**SUBIECTUL II (30p)**

1. Se consideră matricea  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**5p** a) Să se demonstreze că  $\forall x \in \mathbb{R}, \det(A - xI_2) = x^2 - (a + d)x + ad - bc$ .

**5p** b) Dacă  $A^2 = O_2$ , să se demonstreze că  $a + d = 0$ .

**5p** c) Știind că  $A^2 = O_2$ , să se calculeze  $\det(A + 2I_2)$ .

2. Se consideră mulțimea  $G = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^2 - 3b^2 = 1\}$  și operația  
 $(a, b) * (c, d) = (ac + 3bd, ad + bc)$ .

**5p** a) Să se determine  $a \in \mathbb{Z}$  pentru care  $(a, 15) \in G$ .

**5p** b) Să se arate că, pentru orice  $(a, b), (c, d) \in G$ ,  $(a, b) * (c, d) \in G$ .

**5p** c) Să se arate că  $(G, *)$  este grup.