

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie șirul $(F_n)_{n \geq 0}$, dat de $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se verifice relația $A^2 = A + I_2$.

5p b) Să se arate că, dacă $X \in M_2(\mathbb{Q})$, $X \neq O_2$ și $AX = XA$, atunci X este inversabilă.

5p c) Să se arate că $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$, $\forall n \geq 1$.

2. Fie $\sigma, \pi \in S_5$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se demonstreze că $\sigma\pi \neq \pi\sigma$.

5p b) Să se determine numărul elementelor mulțimii $H = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

5p c) Să se arate că $H = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este un subgrup al grupului (S_5, \cdot) .