

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p a) Să se verifice relația $A^3 - A = A^2 - I_3$.

5p b) Să se arate că $A^n - A^{n-2} = A^2 - I_3, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

5p c) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, suma elementelor matricei A^n este $n + 3$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se definește polinomul $P_n = X^n - 1 \in \mathbb{C}[X]$.

5p a) Să se determine rădăcinile complexe ale polinomului P_4 .

5p b) Să se descompună polinomul P_3 în factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$.

5p c) Să se descompună polinomul P_6 în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.