

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră determinantul de ordin $n \geq 2$, $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

5p a) Să se calculeze $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

5p b) Să se verifice că $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, $\forall n \geq 4$.

5p c) Să se arate că $D_n = n + 1$, $\forall n \geq 2$.

2. Un grup (G, \cdot) , cu elementul neutru e , are proprietatea (p) dacă $x^2 = e$, $\forall x \in G$.

5p a) Să se verifice că mulțimea $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, împreună cu legea de compoziție dată de $(a, b) \cdot (c, d) = (a + c, b + d)$, $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$ este un grup care are proprietatea (p) .

5p b) Să se arate că dacă un grup G are proprietatea (p) , atunci $(xy)^2 = x^2 y^2$, $\forall x, y \in G$.

5p c) Să se arate că orice grup care are proprietatea (p) este comutativ.