

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $M_x = \frac{x}{3}A + \frac{1}{3x^2}B$, cu $x \in \mathbb{R}^*$.

5p a) Să se calculeze produsul AB .

5p b) Să se arate că $M_x M_y = M_{xy}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$.

5p c) Să se arate că, pentru orice x real nenul, $\det(M_x) \neq 0$.

2. Se consideră polinomul $p = X^4 - aX^3 - aX + 1$, cu $a \in \mathbb{R}$ și cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

5p a) Să se verifice că $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

5p b) Să se arate că polinomul p nu este divizibil cu $X^2 - 1$ pentru nicio valoare a lui a .

5p c) Să se arate că dacă $a = \frac{1}{2}$, atunci toate rădăcinile polinomului p au modulul 1.