

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1+a^2 & ab & ac \\ ba & 1+b^2 & bc \\ ca & cb & 1+c^2 \end{pmatrix}$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ și A^* adjuncta sa.

5p a) Să se calculeze determinantul matricei A .

5p b) Să se verifice că $\det(A^*) = (\det A)^2$.

5p c) Să se arate că matricea $A - I_3$ are rangul cel mult 1.

2. Fie (G, \cdot) un grup. Pentru fiecare element $a \in G$ se definește funcția $f_a : G \rightarrow G$, $f_a(x) = ax, \forall x \in G$.

5p a) Să se arate că f_a este bijectivă, pentru orice $a \in G$.

5p b) Să se arate că $f_a \circ f_b = f_{ab}, \forall a, b \in G$.

5p c) Fie $\mathcal{F}(G) = \{f_a : G \rightarrow G \mid a \in G\}$. Să se arate că $\mathcal{F}(G)$ împreună cu operația de compunere a funcțiilor formează un grup.