

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $m \in \mathbb{R}$ și punctele $A(m, 1)$, $B(1 - m, 2)$, $C(2m + 1, 2m + 1)$. Se consideră matricea

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 - m & 2 & 1 \\ 2m + 1 & 2m + 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5p a) Să se calculeze $\det(M)$.

5p b) Să se arate că punctele A, B, C sunt necoliniare, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se arate că aria triunghiului ABC este mai mare sau egală cu $\frac{15}{32}$.

2. Fie mulțimea de matrice $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

5p a) Să se dea un exemplu de matrice nenulă din mulțimea A care are determinantul $\hat{0}$.

5p b) Să se arate că există o matrice nenulă $M \in A$ astfel încât $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

5p c) Să se rezolve ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$.