

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie sistemul de ecuații liniare
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + (m^2 - m - 1)y + (m + 1)z = 2 \\ 2x + (m^2 - m - 2)y + 2(m + 1)z = 3 \end{cases}, \text{ unde } m \in \mathbb{R}.$$

5p a) Să se demonstreze că sistemul are soluție unică dacă și numai dacă $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

5p b) Să se arate că pentru $m \in \{0, 1\}$ sistemul este incompatibil.

5p c) Să se arate că dacă $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ este soluție a sistemului, atunci $x_0 - y_0 + 2009 \cdot z_0 = 1$.

2. Se consideră mulțimile $H = \{a^2 \mid a \in \mathbb{Z}_7\}$ și $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_7, a \neq \hat{0} \text{ sau } b \neq \hat{0} \right\}$.

5p a) Să se determine elementele mulțimii H .

5p b) Fie $x, y \in H$ astfel încât $x + y = \hat{0}$. Să se arate că $x = y = \hat{0}$.

5p c) Să se arate că G este grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricelor.