

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + ay + (a+b)z = a+b \\ x + a^2y + (a^2 + b^2)z = a^2 + b^2 \\ x + a^3y + (a^3 + b^3)z = a^3 + b^3 \end{cases}, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}.$$

5p a) Să se calculeze determinantul matricei sistemului.

5p b) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să fie compatibil determinat.

5p c) Să se arate că, pentru orice valori reale ale parametrilor a și b sistemul are soluție.

2. Se consideră polinomul $f = 2X + 1 \in \mathbb{Z}_4[X]$.

5p a) Să se determine gradul polinomului f^2 .

5p b) Să se arate că polinomul f este element inversabil al inelului $(\mathbb{Z}_4[X], +, \cdot)$.

5p c) Să se determine toate polinoamele $g \in \mathbb{Z}_4[X]$ de gradul 1 cu proprietatea că $g^2 = 1$.