

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p a) Să se arate că $\det(A \cdot A^t) \geq 0$.

5p b) Să se arate că, dacă $A \cdot A^t = A^t \cdot A$, atunci $(a-d)(b-c) = 0$.

5p c) Să se demonstreze că, dacă $(A - A^t)^{2009} = A - A^t$, atunci $|b-c| \in \{0,1\}$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$.

5p a) Să se rezolve în \mathbb{Z}_7 ecuația $\hat{2}x = \hat{3}$.

5p b) Să se arate că polinomul $p = \hat{2}X^2 + \hat{4} \in \mathbb{Z}_7[X]$ nu are rădăcini în \mathbb{Z}_7 .

5p c) Să se demonstreze că funcția $f: \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_7$, $f(x) = \hat{2}x$ este un automorfism al grupului $(\mathbb{Z}_7, +)$.