

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se demonstreze că $(I_2 + A)^2 = I_2 + A$.

5p b) Să se demonstreze că mulțimea $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită.

5p c) Să se rezolve ecuația $X^3 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ și polinomul $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$.

5p a) Să se arate că $f(1) + f(-1)$ este număr par.

5p b) Să se arate că, dacă $f(2)$ și $f(3)$ sunt numere impare, atunci polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

5p c) Să se arate că polinomul $g = X^3 - X + 3a + 1$, $a \in \mathbb{Z}$, nu poate fi descompus în produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.