

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x \cdot \ln x}$.

5p a) Să se arate că $f'(x) = f(x)(1 + \ln x)$, $\forall x > 0$.

5p b) Să se determine valoarea minimă a funcției f .

5p c) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0, \infty)$.

2. Se consideră, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, funcțiile $f_n : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x}$ și $g_n : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n-1} + f_n(x).$$

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 g_2(x) dx$.

5p b) Să se arate că $0 \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \frac{1}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right)$, $n \in \mathbb{N}$.