

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ și șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se determine asimptotele graficului funcției f .

5p b) Să se arate că, pentru orice $k > 0$, $\frac{1}{k+1} < f(k+1) - f(k) < \frac{1}{k}$.

5p c) Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este descrescător și are termenii pozitivi.

2. Se consideră funcțiile $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ și $F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$F(x) = a \ln(x+1) + b \ln(x^2+1) + c \arctg x$, unde a, b, c sunt parametri reali.

5p a) Să se determine a, b, c astfel încât F să fie o primitivă a funcției f .

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

5p c) Să se studieze monotonia funcției F , în cazul în care F este primitivă a funcției f .