

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \cos x$  și șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

5p a) Să se arate că funcția  $f$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

5p b) Să se arate că  $0 \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

5p c) Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este convergent la  $\frac{\pi}{2}$ .

2. Se consideră șirul de numere reale  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , definit de  $I_0 = \frac{\pi}{2}$  și  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

5p a) Să se calculeze  $I_1$ .

5p b) Să se arate că șirul  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este descrescător.

5p c) Să se arate că  $nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .