

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - \sin x$ .

**5p** a) Să se arate că funcția  $f$  este crescătoare.

**5p** b) Admitem că pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$  ecuația  $f(x) = n$  are o soluție unică  $x_n$ . Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este nemărginit.

**5p** c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ , unde șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  a fost definit la b).

2. Fie funcțiile  $f, g_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $g_n(x) = \frac{x^n}{1-x}$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**5p** a) Să se calculeze  $\int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - g_2(x)) dx$ .

**5p** b) Să se arate că  $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} g_n(x) dx \leq \frac{1}{2^n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**5p** c) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} \right) = \ln 2$ .