

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$.

5p a) Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ unde $x_n = f(1) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$ este divergent.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

5p c) Să se arate că funcția f este descrescătoare.

2. Se consideră funcția $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$.

5p a) Să se calculeze $f(2)$.

5p b) Să se demonstreze relația $f(x) \leq \frac{1}{x}, \forall x > 1$.

5p c) Să se demonstreze relația $f(x+1) = xf(x) - \frac{1}{e}, \forall x > 1$.