

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, se consideră funcția $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

5p a) Să se arate că f_n este strict descrescătoare pe $[0; 1]$ și strict crescătoare pe $[1; \infty)$.

5p b) Să se arate că ecuația $f_n(x) = 0$, $x > 0$ are exact două rădăcini $a_n \in (0, 1)$ și $b_n \in (1, \infty)$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, unde a_n s-a definit la punctul b).

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$ și $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se arate că $I_0 = \frac{\pi}{4}$.

5p b) Să se arate că $I_{2n} = \frac{1}{2n-1} - I_{2n-2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

5p c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} \right) = I_0$.