

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

5p a) Să se arate că funcția f este derivabilă pe \mathbb{R} .

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$.

5p c) Să se demonstreze că funcția f este mărginită pe \mathbb{R} .

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (1-x)^n$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 f_2(x) dx$.

5p b) Să se arate că $\int_0^1 x f_n(x) dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n\left(\frac{x}{n}\right) dx$.