

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, unde $x_1 \in (0,1)$ și $x_{n+1} = \frac{x_n^5 + 3x_n}{4}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se arate că $x_n \in (0,1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p b) Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent.

5p c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+2}}{x_n} = \frac{9}{16}$.

2. Se consideră o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că $xf(x) = \sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^\pi x^2 f(x) dx$.

5p b) Să se arate că funcția f este integrabilă pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5p c) Să se arate că $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \cos 1$.