

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 + x + 1$ .

5p a) Să se arate că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , ecuația  $f(x) = 3 + \frac{1}{n+1}$  are o unică soluție  $x_n \in \mathbb{R}$ .

5p b) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ , unde  $x_n$  este soluția reală a ecuației  $f(x) = 3 + \frac{1}{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

5p c) Să se determine  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1)$ , unde  $x_n$  este soluția reală a ecuației  $f(x) = 3 + \frac{1}{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

2. Se consideră funcția  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1+t} dt$ .

5p a) Să se arate că  $\int_0^a \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+a)$ ,  $\forall a > -1$ .

5p b) Să se arate că  $f(x) < \ln(1+x)$ ,  $\forall x > 0$ .

5p c) Să se arate că  $f(\pi) > f(2\pi)$ .