

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ și funcțiile $f_n, g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n-1} + x^{2n}, g_n(x) = x^{2n+1} + 1$.

5p a) Să se verifice că $f'_n(x) = \frac{g'_n(x)}{x+1} - \frac{g_n(x)}{(x+1)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

5p c) Să se demonstreze că f_n are exact un punct de extrem local.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze I_2 .

5p b) Să se demonstreze că șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.