

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg(x+2) - \arctg x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se demonstreze că $0 < f(x) \leq \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se demonstreze că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + \arctg \frac{(x+1)^2}{2}$ este constantă.

2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - x + \arctg x$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \arctg x$.

5p a) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f'(x)}{x} dx$.

5p b) Să se determine $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} \int_0^x f(t) dt$.

5p c) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții și dreptele $x=0$ și $x=1$.