

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ și șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se arate că funcția f' este strict crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

5p b) Să se demonstreze că $\frac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{2k\sqrt{k}}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f_n: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_0^x t^n \operatorname{arctg} t \, dt$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se arate că $f_1(x) = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$, $\forall x \geq 0$.

5p b) Să arate că $f_n(1) \leq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n+1}$, $\forall n \geq 1$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n f_n(1)$.