

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(x + \frac{3}{2}\right) + \ln\left(x + \frac{1}{2}\right)$ și șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$,

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

5p a) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

5p b) Să se arate că $f(x) < 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

5p c) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

2. Se consideră funcțiile $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_0^x t^n \arcsin t \, dt$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze derivata funcției f_3 .

5p b) Să se calculeze $f_1\left(\frac{1}{2}\right)$.

5p c) Să se determine $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_2(x)$.