

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0)$ ,  $f(x) = \ln(1+x) - x$ .

- 5p a) Să se demonstreze că funcția  $f$  este strict descrescătoare pe intervalul  $(0, +\infty)$ .  
5p b) Să se arate că funcția  $f$  este surjectivă.  
5p c) Să se arate că graficul funcției  $f$  nu admite asimptote.

2. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ .

- 5p a) Să se calculeze  $\int_0^1 f(x) dx$ .  
5p b) Să se arate că  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(\ln t) dt = \frac{\pi}{2}$ .  
5p c) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right)$ .