

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x-1|}{e^x}$.

5p a) Să se arate că f nu este derivabilă în punctul $x_0 = 1$.

5p b) Să se determine numărul soluțiilor reale ale ecuației $f(x) = m$, unde m este un parametru real.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n))$.

2. Se consideră funcția $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin x$.

5p a) Să se arate că există numerele reale a, b, c astfel încât funcția $F: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$,

$F(x) = (ax^2 + b)\cos x + cx\sin x$ să fie o primitivă a funcției f .

5p b) Să se calculeze $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} f\left(\frac{1}{2x}\right) dx$.

5p c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f și graficul funcției $g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$,
 $g(x) = \pi x - x^2$.