

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

5p b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

5p c) Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f către $+\infty$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $I_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze I_2 .

5p b) Să se demonstreze că $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit prin $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, are limita 0.