

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - f(x))^x$.

5p b) Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p c) Să se arate că funcția f este bijectivă.

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ \ln^2 x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$.

5p a) Să se determine numerele reale a și b astfel încât funcția F să fie primitiva unei funcții f .

5p b) Să se calculeze $\int_1^e \frac{1}{x F(x)} dx$.

5p c) Să se arate că, pentru funcția $h : [1, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = (F(x) - 1) \sin x$, are loc relația $\int_1^\pi h(x) h''(x) dx \leq 0$.