

**SUBIECTUL III (30p)**

1. Se consideră funcția  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ .

**5p** a) Să se arate că funcția  $f$  este continuă pe  $[0,1]$ .

**5p** b) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției  $f$ .

**5p** c) Să se arate că, dacă  $n \in \mathbb{N}^*$ , atunci ecuația  $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$  are cel puțin o soluție în intervalul  $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ .

2. Fie funcțiile  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(1+x^2)$  și  $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x \operatorname{arctg} x$ .

**5p** a) Să se calculeze  $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx$ .

**5p** b) Să se calculeze  $\int_0^1 g(x) dx$ .

**5p** c) Să se calculeze aria suprafeței plane mărginită de graficele funcțiilor  $f$  și  $g$  și de dreptele de ecuații  $x = 0$  și  $x = 1$ .