

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$.

5p **a)** Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = \frac{1}{2}$ și $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \geq 1$ are limită.

5p **b)** Să se arate că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} xf(x), & x \leq 0 \\ \arctg x, & x > 0 \end{cases}$ este derivabilă pe \mathbb{R} .

5p **c)** Să se determine cel mai mare număr real a care are proprietatea $f(x) \geq a + 2 \ln x, \forall x \in (0, \infty)$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$ și F o primitivă a sa.

5p **a)** Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(\cos x) - F(1)}{x^2}$.

5p **c)** Să se arate că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = F(x) + f(x)$ are exact un punct de extrem local.