

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \arctg x$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)g(x))$.

5p b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .

5p c) Să se arate că $f(x) < g(x)$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

2. Fie $m \in \mathbb{R}$ și funcția $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - m, & x \in [0, 1] \\ x \ln x, & x \in (1, 2] \end{cases}$.

5p a) Să se arate că, pentru orice $m \in \mathbb{R}$, funcția f este integrabilă.

5p b) Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\int_1^x t \ln t \, dt}{x - 1}$.

5p c) Pentru $m = 1$, să se demonstreze că, pentru orice $t \in (0, 2)$ există $a, b \in [0, 2]$, $a \neq b$, astfel încât $\int_a^b f(x) \, dx = (b - a)f(t)$.