

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$.

5p **a)** Să se arate că mulțimea valorilor funcției f este $(0, \infty)$.

5p **b)** Să se arate că, dacă $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln f(x)$, atunci $(f(x) - x) \cdot g'(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p **c)** Să se demonstreze că $g(x) < x$, pentru orice $x > 0$, unde g este funcția definită la punctul **b**).

2. Fie mulțimea $M = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ este derivabilă și } \int_0^1 f(x) dx = f(0) = f(1) \right\}$.

5p **a)** Să se arate că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$ aparține mulțimii M .

5p **b)** Să se arate că, dacă f este o funcție polinomială de grad trei care aparține lui M , atunci $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0)$.

5p **c)** Să se arate că, pentru orice $f \in M$, ecuația $f'(x) = 0$ are cel puțin două soluții în intervalul $(0, 1)$.